INGEPRO – Inovação, Gestão e Produção
Junho e 2011, vol. 03, nº. 06
ISSN 1984-6193
www.ingepro.com.br

O efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de X e na produção de itens não conformes.

Roberto Campos Leoni <rcleoni@yahoo.com.br>
Antônio Fernando Branco Costa <fbranco@feg.unesp.br>
Marcela Aparecida Guerreiro Machado <marcela@feg.unesp.br>

Resumo: *No planejamento dos gráficos de controle destinados ao monitoramento da média do processo, assume-se que esta permanece fixa em seu valor alvo até a ocorrência de uma causa especial, que a desloca. Em muitos processos, contudo, é mais razoável supor que a média oscila mesmo na ausência de causas especiais. Para descrever este comportamento oscilatório, tem-se utilizado o modelo autoregressivo de 1ª ordem, AR (1). Neste trabalho, investiga-se o efeito oscilatório da média no desempenho dos gráficos de X, bem como na capacidade do processo. Dependendo dos valores dos parâmetros do modelo que descreve o movimento da média, o gráfico de controle se torna lento na sinalização de causas especiais e o processo se torna pouco capaz.*
Palavras-chave: Controle estatístico de processos (CEP); Autocorrelação; Modelo ARMA(1,1).

The effect of autocorrelation on the performance graph of X and the production of non-compliant items.

Abstract: The design of the $\overline{X}$ chart, assumes that the process mean remains on its target value until the occurrence of a special cause that promotes a fixed shift. In many cases, however, it is more reasonable to assume that the mean wanders even in the absence of the special cause. This wandering behavior is described by an AR(1) model. This work investigates the $\overline{X}$ chart's performance and the process capability when the mean wanders. Depending on the magnitude of the oscillatory movement, the control chart becomes slow in signaling special causes and a larger number of items will not attend the specifications.
Keywords: Statistical *process control (SPC); Autocorrelation; Model ARMA (1,1).*

1. Introdução

O gráfico de controle de $\overline{X}$ para dados independentes é muito usado para monitorar a média μ de um processo cuja característica de qualidade de interesse *X* é uma grandeza mensurável representada pelo modelo de Shewhart:

$$X_k = \mu + e_k \quad k=1,2,\ldots \; ; e_k \text{ é uma variável aleatória IID} \sim N(0,\sigma^2_e)$$

O objetivo principal é detectar mudanças na média do processo provocada por causas especiais. Por razões práticas, é conveniente descrever o deslocamento da média em unidades do desvio padrão do erro aleatório (σ_e), isto é, $\delta\sigma_e = (\xi - \xi_0)$, sendo ξ_0 a média do processo em controle e $(\xi - \xi_0)$ o deslocamento ocorrido após a ocorrência da causa especial. Sem perda de generalidade, supõe-se que $\xi_0 = 0$ e $\sigma_e = 1$.

INGEPRO – Inovação, Gestão e Produção
Junho e 2011, vol. 03, n°. 06
ISSN 1984-6193
www.ingepro.com.br

ordem de $\delta\sigma_x$, sendo σ_x sempre maior que σ_e. O presente artigo ajusta os desvios de maneira que o desempenho possa ser em uma base comparável, ou seja, consideramos que os deslocamentos da média em ambos os modelos sejam de uma mesma magnitude ($\delta\sigma_e$).

Para as mesmas especificações, a taxa de não conformidades é sempre maior no caso em que a média oscila de acordo com o modelo AR(1) e quanto maior for a parcela de variabilidade devida a esse modelo, maior será o percentual de produtos fora de especificação.

Na sessão 2, descreve-se o modelo AR(1) com erro aleatório adicional. Nas sessões 3 e 4, discute-se o efeito da autocorrelação no desempenho do gráfico de controle X e na produção de itens não conformes. Na sessão 5, apresenta-se um caso real de processo autocorrelacionado.

2. Descrição do modelo AR(1) com erro aleatório adicional ou ARMA(1,1)

Em um processo autocorrelacionado, os dados podem ser representados pelo modelo:

$$X_k = \mu_k + e_k\,,\quad k=1,2.......$$

onde X_k é o dado mensurado no tempo k; μ_k é a média do processo estocástico no tempo k e e_k uma variável aleatória IID ~ N $(0,\sigma^2_e)$

A média do processo no tempo k, μ_k, é regida pelo modelo AR(1):

$$\mu_k = (1-\phi)\xi + \phi\mu_{k-1} + \alpha_k,\quad k=1,2...$$

onde $\xi = E(\mu_k)$ é a média global do processo; α_k é uma variável aleatória IID ~ N $(0,\sigma^2_\alpha)$ e ϕ é o parâmetro do modelo AR(1), $|\phi|<1$. Os valores de e_k e α_k são independentes.

Este modelo considera que a média não é constante, ou seja, a média oscila ao redor de uma média global ($\xi=E(\mu_k)$) ao longo do tempo. Assume-se que a média, μ_k, no período t_k, se comporta de acordo com um modelo estocástico quando o processo está em controle e parte da variância de X_k, variância formada por componentes de longo prazo, é atribuída à variância de μ_k. A variabilidade adicional do modelo é devida a e_k que poderia representar uma combinação da variabilidade em curto prazo com erro de medição. Por exemplo: um processo cujo material seja processado em lotes, μ_k representaria a média da característica de qualidade monitorada no lote no período k, σ^2_μ representaria a variabilidade da característica de qualidade monitorada de lote para lote e σ^2_e representaria a variabilidade da característica de qualidade monitorada dentro do lote. Dentro do contexto apresentado, os lotes seriam independentes se $\phi=0$ e correlacionados caso $\phi\neq 0$. Os resultados numéricos apresentados neste artigo são válidos para os casos em que $|\phi|<1$. A distribuição de μ_k para $k \geq 1$ depende do valor inicial μ_0. Assumindo-se que o valor μ_0 possui média ξ e variância $\sigma^2_\alpha/(1-\phi^2)$, então, $\mu_k \sim N(E(\mu_k)=\xi\,;\ \sigma^2_\mu= \sigma^2_\alpha/(1-\phi^2))$. A variância total do modelo é dada por: $\sigma^2_X= \sigma^2_\mu + \sigma^2_e = \sigma^2_\alpha/(1-\phi^2) + \sigma^2_e$.

A variação que ocorre em μ_k, dada por $\mu_k = (1-\phi)\xi + \phi\mu_{k-1} + \alpha_k$, k=1,2..., é uma variação própria do processo e não pode ser removida. Quando o processo encontra-se em controle, $\xi=\xi_0$. Assim, quando ocorre uma mudança na média do processo provocada por causas especiais, por razões práticas, é apropriado expressar esta mudança de forma padronizada através da expressão: $\delta=(\xi-\xi_0)/\sigma_e$, em que $\xi-\xi_0$ representa o deslocamento da média.

Uma parcela da variabilidade do modelo é devida a parte auto-regressiva e o restante ao erro aleatório adicional. É conveniente definir ψ como a proporção da variância total do processo devida ao modelo AR(1): $\psi = \sigma^2_\mu/\sigma^2_X = \sigma^2_\mu/(\sigma^2_\mu + \sigma^2_e)$. Quando $\psi=1$ $(\sigma^2_e=0)$ os

4. O efeito da autocorrelação na produção de itens não conformes – alguns resultados simulados

A produção de itens não conformes está diretamente relacionada à presença de causas especiais, aos limites de especificação impostos pela Engenharia e a variabilidade do processo. Espera-se em processos muito capazes que toda a produção esteja dentro dos limites de especificação e, à medida que a capacidade de um processo diminua, itens fora de especificação ocorram com maior frequência. A capacidade do processo é medida pelo índice Cp ou Cpk, ver Costa *et al*. (2005) para maiores detalhes. A Tabela 3 apresenta o percentual fora da especificação (PFE) de itens relacionados a um processo razoavelmente capaz (Cp=Cpk=1,0). Em processos independentes cujos resíduos sejam IID ~ $N(0;\sigma^2_e)$, o PFE é da ordem de 0,0027 quando está em controle, porém, quando as observações são autocorrelacionadas, o PFE aumenta consideravelmente com ψ, mesmo com o processo em controle. Por exemplo: se $\delta=0$; $\phi=+0,4$ e $\psi=0,1$ tem-se um PFE de 0,44%, enquanto que para $\delta=0$; $\phi=+0,4$ e $\psi=0,9$, o PFE é de 34,27%.

	$\phi=-0,8$			$\phi=-0,4$			$\phi=0$	$\phi=+0,4$			$\phi=+0,8$		
ψ \ δ	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,0**	**0,1**	**0,5**	**0,9**	**0,1**	**0,5**	**0,9**
							PFE (%)						
0,0	0,44	3,39	34,26	0,44	3,39	34,26	0,27	0,44	3,39	34,27	0,44	3,38	34,27
0,5	0,93	4,51	34,88	0,93	4,51	34,88	0,64	0,93	4,52	34,87	0,93	4,52	34,87
1,0	2,90	8,09	36,63	2,90	8,09	36,65	2,28	2,89	8,08	36,64	2,90	8,12	36,64
1,5	7,74	14,52	39,49	7,74	14,49	39,49	6,68	7,73	14,50	39,49	7,74	14,49	39,47
2,0	17,13	23,99	43,26	17,13	23,97	43,27	15,86	17,14	24,00	43,27	17,14	24,02	43,25
3,0	50,00	49,98	52,88	49,99	49,97	52,88	49,99	49,99	50,00	52,89	49,99	49,99	52,89
4,0	82,84	75,99	63,75	82,84	76,02	63,73	84,11	82,85	76,03	63,73	82,84	75,97	63,75
5,0	97,09	92,13	74,21	97,09	92,11	74,20	97,70	97,09	92,11	74,20	97,09	92,13	74,21

Tabela 3 - Percentual de itens fora de especificação; $\xi-\xi_0=\delta\sigma_e$; LIE=-3; LSE=+3; Cpk=1,0.

A Figura 3 exibe aumento na porcentagem de não conformes com o crescimento da parcela de variabilidade devida à oscilação da média. Observa-se, por exemplo, que para $\delta=1$; $\phi=+0,4$ e $\psi=0,1$, o PFE=2,89%. Enquanto que para $\psi=0,9$, o PFE=34,27%. Mesmo o processo sendo razoavelmente capaz, de acordo com o Cpk, a correlação aumenta consideravelmente o PFE.