

Comparação de testes estatísticos para matrizes de covariâncias de processos multivariados

Sueli Aparecida Mingoti <suelimngt@gmail.com>
Renato Azevedo da Silva <renato.azevedo@gmail.com>

Resumo: Neste artigo dois novos testes estatísticos são introduzidos para a matriz de covariâncias de uma população sob a suposição de que os dados são normalmente distribuídos e independentes. Os testes propostos são fundamentados nos autovalores da matriz de covariâncias e são adaptações dos testes estatísticos de Hotelling e Hayter e Tsui utilizados em estatística multivariada para testar o vetor de médias de uma população. O desempenho desses novos testes estatísticos foi avaliado através de simulações Monte Carlo e os resultados mostraram que eles foram mais poderosos que o tradicional teste estatístico da variância generalizada em todas as situações simuladas. Em particular, o ganho de poder é bem acentuado em casos nos quais as matrizes de covariâncias sob as hipóteses nula e alternativa possuem determinantes semelhantes, mas uma estrutura diferente em relação a seus elementos. Nesse artigo é discutido também o uso da distribuição assintótica da estatística de teste para determinação da região de rejeição da hipótese nula. Para os três testes estatísticos tratados foi mostrado que a distribuição assintótica não deve ser utilizada para tamanhos de amostras pequenos. Nessas situações, a distribuição exata das estatísticas de teste é a indicada.

Palavras-chave: testes estatísticos de hipóteses; matrizes de covariâncias; poder do teste; variância generalizada; autovalores.

Comparing statistical tests for covariance matrices of independent multivariate processes

Abstract: In this paper two new statistical tests are proposed for testing the covariance matrix in one population under multivariate normality assumption and independence. The proposed tests are based on the covariance matrix eigenvalues and are adaptations of the Hotelling and Hayter and Tsui's statistical tests used in multivariate statistics for testing the vector mean of one population. The performance of the new tests was evaluated by Monte Carlo simulation and the results showed that they were more powerful than the well-known generalized variance statistical test in all simulated situations. In particular the gain in power was very considerable in cases where the covariances matrices under the null and the alternative hypothesis had similar determinants but different elements structures. In this paper it is also discussed the use of asymptotic distributions of the test statistic to build the rejection region of the null hypothesis. For all three statistical tests presented it is shown that the asymptotic distribution should not be used for small samples sizes. In these situations the exact distribution is the indicated.

Keywords: hypothesis statistical tests; covariance matrix; power of the test; generalized variance; eigenvalues.

1. Introdução

A maioria dos processos produtivos que envolvem múltiplas variáveis geram dados com os quais o monitoramento simultâneo do processo se faz necessário. Para avaliar corretamente se o processo está ou não sob controle estatístico é necessário observar não apenas cada variável isoladamente, mas também o relacionamento entre elas. Isto implica que o estudo estatístico deve ser feito através de técnicas estatísticas multivariadas que levam em consideração a correlação entre as variáveis. Na análise de processos multivariados muita atenção tem sido dedicada aos testes de comparação de vetores de médias como o teste T^2 de Hotelling (MASON e YOUNG, 2002), o de Hayter e Tsui (1994), de Mudholkar e Srivastava (2000) e o de Willians et. al. (2006), dentre outros. Uma atenção menor tem sido destinada ao monitoramento da variabilidade através do uso de testes estatísticos de hipóteses que auxiliem na detecção de mudanças na matriz de covariâncias ou de correlações do processo ao longo do tempo. Como as estatísticas dos testes de hipóteses para o vetor de médias dependem do conhecimento da matriz de covariâncias do processo e da suposição que esta permanece estável, sem alterações significativas ao longo do tempo, o não monitoramento do comportamento dessa matriz pode levar a conclusões equivocadas, pois em função de alguma alteração ter ocorrido na matriz de covariâncias é possível que: (1) o vetor de médias do processo não tenha se alterado, mas o teste de hipótese correspondente venha a indicar uma mudança significativa; (2) o teste estatístico para o vetor de médias indique não haver qualquer alteração significativa quando ela de fato tenha ocorrido; (3) que o processo seja declarado capaz de atender as exigências de seus clientes quando na realidade é incapaz e isso ocorre em vista do fato de que vários dos coeficientes de capacidade multivariados são funções matemáticas da matriz de covariâncias do processo (NIVERTHI e DEY,2000; PEARN et. al., 2007). Todas as situações acarretam custos e perdas tanto financeiras quanto de credibilidade para as empresas.

Os testes para variabilidade de processos multivariados ainda são pouco utilizados na prática. Poucos são os *softwares* estatísticos que dispõem de testes implementados para tal finalidade e aqueles que os tem, não os dispõem no formato usual de controle de qualidade, dificultando assim o uso dos mesmos pelos usuários da área.

2. Monitoramento da variabilidade de processos multivariados

O teste de hipótese mais conhecido, no caso de processos independentes, para comparação da matriz de covariâncias do processo com alguma matriz padrão é o da variância generalizada (MONTGOMERY, 2004; APARISI et. al.,1999), que é uma medida relacionada com a dispersão da superfície gerada no espaço pelos valores possíveis do vetor contendo as características de qualidade monitoradas. Teoricamente, a variância generalizada é definida como o determinante da matriz de covariâncias teórica do processo. Neste caso, a estatística de teste é o determinante da matriz de covariâncias amostral, conhecido como variância generalizada amostral. Para cada amostra aleatória selecionada o determinante é calculado e comparado com os limites de referência (superior e inferior de controle) construídos levando-se em consideração a distribuição de probabilidades conjunta das características de qualidade de interesse sob a suposição de que o processo está sob controle estatístico. Quando o determinante da matriz de covariâncias amostral está fora da região de referência o processo é declarado "fora de controle estatístico". Em geral, os limites superior e inferior de controle são calculados utilizando-se a aproximação normal como distribuição da variância generalizada amostral sob a hipótese nula. No entanto, essa aproximação só é válida para tamanhos amostrais grandes (DJAUHARI, 2009) pois para tamanhos amostrais pequenos a

distribuição exata da variância amostral é acentuadamente assimétrica como será visto na seção 3. Outros testes estatísticos são encontrados na literatura como o VMAX de Costa e Machado (2008) e o de Sullivan et. al. (2007) que é fundamentado numa comparação de todos os elementos da matriz de covariâncias teórica com suas correspondentes estimativas de máxima verossilhança (ANDERSON, 2003). O teste VMAX envolve integrações numéricas da distribuição de probabilidade qui-quadrado não central para cálculo dos limites de controle e do poder do teste. O teste de Sullivan et. al. por sua vez, depende da matriz de Informação de Fisher que não é trivial de se obter para distribuições diferentes da normal multivariada (CASELA e BERGER, 2002). Desse modo, torna-se interessante a busca por testes de implementação mais simples e que tenham poder maior que o teste da variância generalizada.

O objetivo desse artigo é introduzir dois novos testes fundamentados na comparação dos autovalores da matriz de covariâncias teórica estipulada na hipótese nula com os autovalores da matriz de covariâncias amostral. Através de simulações Monte Carlo mostramos que esses novos testes são mais poderosos que o da variância generalizada.

3. Metodologia

Nesta seção descrevemos o teste da variância generalizada e os dois testes alternativos fundamentados nos autovalores da matriz de covariâncias que serão comparados nesse artigo.

3.1 Teste da variância generalizada

Seja $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ o vetor aleatório contendo as características de qualidade de interesse com distribuição normal p -variada com vetor de médias $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ e matriz de covariâncias $\Sigma_{p \times p}$, $p > 1$. Seja $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n$, uma amostra aleatória de tamanho n do vetor aleatório X , sendo $\underline{X}_i = (X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi})'$ os valores amostrais observados das p características de qualidade para a i -ésima unidade amostral, $i=1, 2, \dots, n$. A variância amostral generalizada, simbolizada por $|S|$ é o determinante da matriz de covariâncias amostral que é definida como:

$$S_{p \times p} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\underline{X}_i - \bar{\underline{X}})(\underline{X}_i - \bar{\underline{X}})'$$

onde $\bar{\underline{X}} = (\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p)'$ é o vetor de médias amostral sendo \bar{X}_j a média amostral da j -ésima variável (característica de qualidade), $j=1, 2, \dots, p$. A matriz de covariâncias amostral é uma estimativa não-viciada da matriz de covariâncias populacional $\Sigma_{p \times p}$.

A variância generalizada está relacionada com a dispersão da superfície de resposta gerada no espaço pelos valores possíveis do vetor aleatório X e é utilizada como um índice de dispersão global para dados multivariados. Quanto maior o valor da variância generalizada mais dispersa é a distribuição de valores de X . Sejam $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ e $H_a : \Sigma \neq \Sigma_0$ as hipóteses nula e alternativa, sendo Σ_0 uma matriz pré-especificada. Nesse caso, para um nível de confiança de $(1-\alpha)100\%$, $0 < \alpha < 1$, os limites de controle para monitoramento da estrutura de variabilidade do processo são dados por (Montgomery, 2004):

$$LSC = |\Sigma_0| \left(1 + z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right); \quad LC = |\Sigma_0|; \quad LIC = \max \left(0, |\Sigma_0| \left(1 - z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{b_2}}{b_1} \right) \right) \quad (1)$$

sendo

$$b_1 = \frac{1}{(n-1)^p} \prod_{i=1}^p (n-i); \quad b_2 = \frac{1}{(n-1)^{2p}} \prod_{i=1}^p (n-i) \left\{ \prod_{j=1}^p (n-j+2) - \prod_{j=1}^p (n-j) \right\}$$

LSC, *LC* e *LIC* os limites inferior, médio e superior de controle, respectivamente.

Com base nos dados amostrais a hipótese nula será rejeitada se a variância generalizada amostral ($|S|$) não pertencer a região de controle do processo, ou seja sempre que $|S| > LSC$ ou $|S| < LIC$. O valor de α especifica a probabilidade do erro tipo I, isto é a probabilidade de que a hipótese nula seja rejeitada quando ela de fato é verdadeira, o que dentro da terminologia de controle de qualidade indica a probabilidade de ocorrência de um alarme falso (dizer que o processo está fora de controle quando não está).

Os limites de controle dados em (1) são construídos utilizando-se a distribuição normal como aproximação para a distribuição exata do determinante $|S|$. No entanto, sabe-se que a distribuição exata de $|S|$ é dada pela distribuição da variável aleatória definida em (2):

$$\frac{|S|}{(n-1)^p} \prod_{k=1}^p Z_k \quad (2)$$

onde Z_k são variáveis aleatórias independentes com distribuição qui-quadrado com $(n-k)$ graus de liberdade, $k=1,2,\dots,p$ (ANDERSON, 2003). A aproximação normal para a distribuição da variância generalizada amostral está fundamentada em grandes valores de tamanhos de amostra n (DJAUHARI, 2009) o que em geral não é o caso praticado em controle de qualidade. Os erros advindos dessa aproximação podem ser bem consideráveis como será mostrado na seção 4. A título de ilustração apresentamos na Figura 1 as formas gerais da distribuição exata de $|S|$ para vários valores de n . As distribuições foram simuladas considerando-se 50000 amostras aleatórias da distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias dada por:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{bmatrix}$$

Para cada amostra gerada calculou-se expressão dada em (2) construindo-se assim as curvas que estão na Figura 1. É possível ver claramente que a aproximação normal somente passa a ser adequada a partir de $n=100$, não sendo válida para amostras pequenas já que para essas as distribuições exatas de $|S|$ são assimétricas positivas.

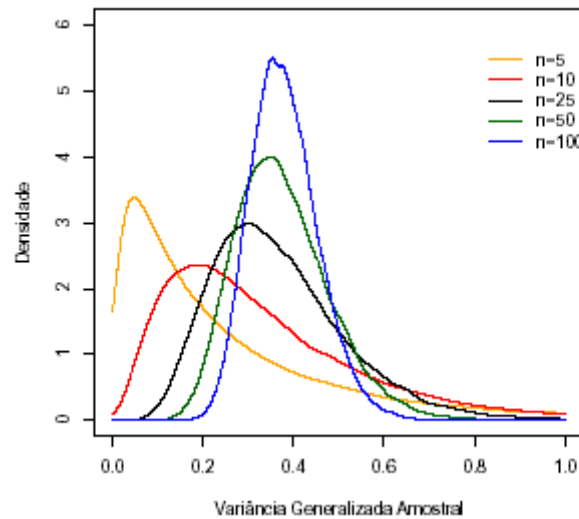


FIGURA 1 – Gráfico da distribuição exata da variância generalizada amostral para vários tamanhos de amostra (n).

3.2 Testes estatísticos alternativos via autovalores da matriz de covariâncias

Embora seja uma medida amplamente utilizada para medir a dispersão global de dados multivariados, a variância generalizada muitas vezes não descreve as reais diferenças que existem entre os componentes das matrizes de covariâncias que estão sendo comparadas. Como um exemplo, considere as 2 matrizes A e B dadas a seguir:

$$\Sigma_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma_B = \begin{bmatrix} 2,32 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Ambas têm determinantes iguais a 1 mas os valores numéricos dos elementos das duas matrizes são totalmente diferentes. Em termos de distribuições de probabilidade a matriz A está relacionada com a situação na qual temos duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 1 e correlação igual a zero, enquanto que a matriz B está relacionada com a situação na qual se tem duas variáveis aleatórias com variâncias iguais a 2,32 e 0,5 respectivamente e correlação igual a 0,37. É possível mostrar que o determinante de uma matriz de covariâncias é igual ao produto de seus autovalores (JOHNSON e WICHERN, 2002). No caso da matriz A os autovalores correspondentes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, enquanto que no caso da matriz B os autovalores são iguais a $\lambda_1 = 2,404$ e $\lambda_2 = 0,416$, ou seja embora os determinantes das duas matrizes sejam iguais as suas estruturas em termos de autovalores são totalmente diferentes. Logo, os autovalores da matriz são quantidades potenciais para construção de testes estatísticos na tentativa de detectar diferenças entre matrizes de covariâncias que não são percebidas pelos determinantes das matrizes.

Quando os dados amostrais são provenientes de uma distribuição normal multivariada com vetor de médias $\underline{\mu}$ e matriz de covariâncias Σ_{pxp} , é possível mostrar que (ANDERSON, 2003) os autovalores $\hat{\lambda}_j$ da matriz de covariâncias amostral S_{pxp} , $j=1,2,\dots,p$, são aproximadamente independentes e com distribuição aproximadamente normal com média igual λ_j e variância igual a $\lambda_j^2 / [2(n-1)]$, sendo λ_j os autovalores da matriz teórica Σ_{pxp} ,

$j=1,2,\dots,p$. Logo, no caso de dados normalmente distribuídos, é possível propor testes estatísticos fundamentados na comparação dos autovalores da matriz que está sendo postulada sob a hipótese nula com os da matriz de covariâncias amostral.

3.2.1 Adaptação do Teste T^2 de Hotelling para testar os autovalores de matrizes

Sejam $H_0 : \Sigma = \Sigma_0$ e $H_a : \Sigma \neq \Sigma_0$ as hipóteses nula e alternativa, e $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)'$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$, o vetor contendo os autovalores da matriz teórica Σ_0 . Seja $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p)'$, $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_p$, o vetor contendo os autovalores da matriz de covariâncias amostral $S_{p \times p}$. Considere a seguinte estatística de teste:

$$T^2 = (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \Sigma_{\lambda_0}^{-1} (\hat{\lambda} - \lambda_0)' \quad (3)$$

onde $\Sigma_{\lambda_0} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 / 2(n-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 / 2(n-1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p^2 / 2(n-1) \end{bmatrix}$

é a matriz de covariâncias do vetor $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p)'$ calculada supondo-se $\Sigma = \Sigma_0$.

Sob a hipótese nula a estatística T^2 tem aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com p graus de liberdade. Deste modo, a um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, rejeita-se a hipótese nula para valores observados de T^2 maiores que o nível crítico c , sendo c tal que $P[\chi_p^2 > c] = \alpha$. A estatística dada em (3) é uma adaptação da estatística utilizada no teste multivariado de comparação de vetores de médias conhecido como T^2 de Hotelling. Para maiores detalhes do teste T^2 para o vetor de médias ver Johnson e Wichern (2002).

3.2.2 Adaptação do Teste de Hayter e Tsui para testar os autovalores de matrizes

Hayter e Tsui propuseram em 1994 um teste estatístico multivariado alternativo para comparação de vetores de médias que é de fácil implementação e tem um aspecto interessante pois quando a hipótese nula é rejeitada ele indica automaticamente quais são os componentes entre os dois vetores de médias que são significativamente diferentes. Os testes de Hayter e Tsui e o T^2 de Hotelling são competidores não havendo um que seja sempre superior ao outro em termos de poder (ver Hayter e Tsui, 1994; Kalgonda e Kulkarni, 2004).

Assim como o teste T^2 de Hotelling, o teste de Hayter e Tsui também pode ser adaptado para a avaliação dos autovalores da matriz de covariâncias. Considere as mesmas hipóteses tratadas na seção 3.2.1. Seja a estatística de teste M definida por:

$$M = \max \left\{ \left| \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_j / \sqrt{2(n-1)}} \right|, j = 1, 2, \dots, p \right\} \quad (4)$$

Sob a hipótese nula e normalidade p -variada, as variáveis $W_j = \frac{\hat{\lambda}_j - \lambda_j}{\lambda_j / \sqrt{2(n-1)}}$ tem distribuição aproximadamente normal com média zero e variância 1, $j=1,2,\dots,p$, e o vetor aleatório $W = (W_1, W_2, \dots, W_p)'$ tem distribuição normal p -variada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias igual a matriz identidade. Assim, sob a hipótese nula a distribuição da estatística M é a distribuição do máximo de p variáveis aleatórias normais padronizadas. Para um nível de significância α , $0 < \alpha < 1$, a hipótese nula $H_0: \Sigma = \Sigma_0$, será rejeitada se o valor observado da estatística M for maior que o valor crítico $C_{r\alpha}$, tal que $P[M > C_{r\alpha}] = \alpha$. A constante $C_{r\alpha}$ é obtida através do algoritmo apresentado na Figura 2. Se a estatística M assumir um valor acima de $C_{r\alpha}$, diz-se que o processo está fora de controle em relação a sua variabilidade global. Observando-se os componentes W_j que resultaram em um valor observado acima de $C_{r\alpha}$, tem-se os autovalores da matriz de covariâncias teórica que são significativamente diferentes dos respectivos autovalores da matriz de covariâncias amostral.

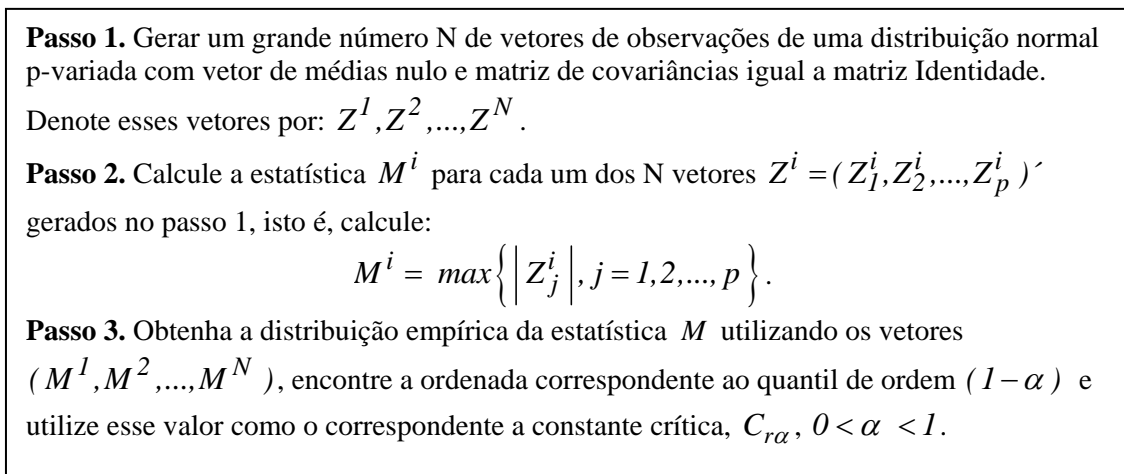


FIGURA 2 – Algoritmo para determinação da constante $C_{r\alpha}$

4. Comparação dos testes estatísticos via simulação Monte Carlo

Com a finalidade de avaliar o desempenho dos testes estatísticos fundamentados nos autovalores e compará-los com o teste da variância generalizada foi feito um estudo no qual o poder desses testes foi estimado através de simulação Monte Carlo para o caso bivariado. Em todos os testes a região de rejeição da hipótese nula foi construída considerando-se a distribuição exata da estatística de teste e a respectiva distribuição aproximada (assintótica). No caso do teste da variância generalizada a distribuição aproximada utilizada foi a normal e os limites de controle foram obtidos como em (1) da seção 3.1; no caso do teste T^2 de Hotelling a distribuição aproximada foi a qui-quadrado com $p=2$ graus de liberdade. Para o teste de Hayter e Tsui a região de rejeição da hipótese nula construída com a distribuição aproximada é aquela calculada de acordo com o valor de $C_{r\alpha}$ obtido através do algoritmo dado na Figura 2 utilizando-se $N=100000$. Para os três testes estatísticos tratados nesse artigo, a distribuição exata da correspondente estatística de teste foi obtida através da geração de 50000 amostras aleatórias de uma distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo e

matriz de covariâncias Σ_0 estipulada na hipótese nula e dada por:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{bmatrix}$$

Para cada amostra aleatória gerada a estatística de teste foi calculada obtendo-se no final a sua distribuição empírica a partir da qual encontrou-se os valores dos limites críticos do teste, estabelecendo-se a região de rejeição da hipótese nula. Todos os testes foram construídos a um nível de significância nominal de 0,27%. Os limites críticos (inferior e superior), obtidos para vários tamanhos de amostra são apresentados na Tabela 1, sendo possível observar a grande diferença entre os valores calculados através da distribuição exata e aqueles calculados pela distribuição assintótica. À medida que o tamanho da amostra aumenta os limites críticos obtidos pelas distribuições exata e assintótica se aproximam mas essa aproximação é lenta. Observa-se que os limites calculados pela distribuição assintótica tem em geral, uma amplitude maior que os consruídos pela distribuição exata.

TABELA 1– Limites críticos assintóticos e exatos dos testes estatísticos - nível de significância nominal 0,0027

	n=5		n=10		n=25		n=50		n=100		n=200	
	Ass.	Emp.	Ass.	Emp.	Ass.	Emp.	Ass.	Emp.	Ass.	Emp.	Ass.	Emp.
VG	0,00 1,39	0,00 2,92	0,00 1,12	0,02 1,80	0,00 0,86	0,09 1,11	0,05 0,73	0,15 0,85	0,15 0,63	0,20 0,69	0,23 0,56	0,25 0,59
HT	0,0 3,06	0,00 4,03	0,00 3,06	0,00 3,63	0,00 3,06	0,00 3,32	0,07 3,06	0,00 3,23	0,00 3,06	0,00 3,08	0,00 3,06	0,00 3,06
H	0,00 11,83	0,00 17,00	0,00 11,83	0,00 14,32	0,00 11,83	0,00 12,40	0,00 11,83	0,00 11,91	0,00 11,83	0,00 11,17	0,00 11,83	0,00 10,92

* VG: Variância Generalizada; HT: teste de autovalores- Hayter e Tsui; H: teste de autovalores- Hotelling; ass: limites assintóticos ; emp: limites exatos obtidos via distribuição empírica.

Para a estimação das taxas de alarmes falsos e verdadeiros de cada teste (probabilidade do erro tipo I e poder do teste), utilizou-se o seguinte procedimento: foram geradas 20000 amostras aleatórias da distribuição normal bivariada com vetor de médias nulo e matriz de covariâncias Σ pré-especificada. Para cada amostra e cada teste estatístico, a hipótese nula foi testada sendo contabilizado no final a proporção de amostras nas quais a hipótese nula foi rejeitada. Esse procedimento foi repetido k=100 vezes tendo-se assim, 100 estimativas da proporção de rejeição da hipótese nula. Uma média desses 100 valores foi calculada. Inicialmente gerou-se as amostras considerando-se a matriz $\Sigma = \Sigma_0$ estipulada na hipótese nula. Nesse caso, a rejeição da hipótese nula configura o erro tipo I, ou seja é uma estimativa da taxa de alarmes falsos do teste (ou da carta de controle dentro da terminologia de controle de qualidade). Posteriormente, as amostras foram geradas sob a hipótese alternativa, isto é $\Sigma = \Sigma_1$. Nesse caso, a rejeição da hipótese nula configura o poder do teste, ou seja, uma estimativa da taxa de alarmes verdadeiros da carta de controle. Todo o processo de simulação e geração das estimativas das taxas de alarmes falsos e verdadeiros foi implementado através de um programa computacional desenvolvido no software *R for Windows*.

A Tabela 2 mostra as estimativas médias obtidas da probabilidade do erro tipo I considerando-se a região crítica de cada teste construída via distribuições assintótica e exata da estatística de teste correspondente. É possível perceber que a aproximação via distribuição normal não é uma boa alternativa para o teste da variância generalizada pois as estimativas do nível de significância não são próximas daqueles obtidos pela distribuição exata. O mesmo pode ser observado para os testes de Hotelling e Hayter e Tsui. A distribuição exata gera

estimativas do nível de significância próximas ao valor do nível de significância nominal 0,27% usado para construção da região de rejeição da hipótese nula em todos os três testes. As estimativas médias do erro tipo I obtidas usando a distribuição assintótica são em geral, maiores que as obtidas pela distribuição exata o que ocasiona um aumento da taxa de alarmes falsos da carta de controle, algo não desejável. Sendo assim, em caso de amostras pequenas a distribuição assintótica não seria indicada para nenhum dos três testes avaliados.

A Tabela 3 mostra os cenários gerados sob a hipótese alternativa para avaliação do poder dos testes e algumas medidas de comparação entre as matrizes Σ_1 e Σ_0 , como razão entre determinantes, traços e autovalores das matrizes. Os cenários 1, 2 e 3 correspondem a situações nas quais a matriz de covariâncias populacional tem uma estrutura diferente da estipulada na hipótese nula mas seu determinante é próximo dessa. Já no cenário 4 os determinantes das duas matrizes diferem consideravelmente mas os autovalores são semelhantes. Na Tabela 4 tem-se as estimativas médias do poder de cada teste em cada cenário simulado considerando-se apenas a distribuição exata da estatística de teste uma vez que os poderes obtidos via distribuição assintótica não seriam comparáveis visto que o nível de significância estimado usando os limites da distribuição assintótica são maiores que 0,0027 para vários valores de n .

TABELA 2 – Estimativas médias da probabilidade do erro tipo I dos testes estatísticos

	Estimativas	$n=5$	$n=10$	$n=25$	$n=50$	$n=100$	$n=200$
VG	Assintótica	0,0064	0,0067	0,0047	0,0031	0,0020	0,0014
	Exata	0,0021	0,0023	0,0023	0,0022	0,0023	0,0027
HT	Assintótica	0,0133	0,0090	0,0058	0,0040	0,0034	0,0029
	Exata	0,0032	0,0031	0,0031	0,0025	0,0028	0,0027
H	Assintótica	0,0093	0,0058	0,0043	0,0024	0,0018	0,0016
	Exata	0,0033	0,0030	0,0020	0,0023	0,0025	0,0026

TABELA 3 – Modelos teóricos gerados sob as hipóteses nula e alternativa

Casos	Modelos	Determinante	Traço	Autovalores	RD	RT	RA
	$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1,23 & 0,79 \\ 0,79 & 0,83 \end{bmatrix}$	0,397	2,06	1,845 0,215	--	--	--
1.	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,46 & 1,28 \\ 1,28 & 0,83 \end{bmatrix}$	0,404	3,29	3,162 0,128	1,02	1,59	1,71 0,59
2.	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 3,69 & 1,63 \\ 1,63 & 0,83 \end{bmatrix}$	0,407	4,52	4,428 0,092	1,03	2,19	2,40 0,43
3.	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2,46 & 2,39 \\ 2,39 & 2,49 \end{bmatrix}$	0,413	4,95	4,865 0,085	1,04	2,40	2,64 0,39
4.	$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1,35 & 0,79 \\ 0,79 & 0,91 \end{bmatrix}$	0,611	2,26	1,950 0,313	1,54	1,09	1,06 1,46

* RD, RT e RA: razões entre os determinantes, traços e autovalores das matrizes de covariâncias sob a hipótese alternativa e nula, respectivamente.

Os resultados da Tabela 4 mostram que para os cenários 1,2 e 3 o teste da variância generalizada apresentou um poder muito baixo (maior poder igual a 0,39% para $n=200$) e na situação 4 na qual a diferença entre os determinantes das matrizes Σ_1 e Σ_0 é mais acentuada, o teste só passa a perceber a existência dessa diferença para amostras de tamanho $n=100$ (poder=0,2098). Mesmo com um tamanho de amostra $n=200$ o poder do teste não chega a 60%. Os testes de Hotelling e Hayter e Tsui por sua vez, conseguiram captar melhor as diferenças entre as duas matrizes. Nas situações 2 e 3 nas quais os autovalores das matrizes Σ_1 e Σ_0 são totalmente diferentes embora os determinantes sejam semelhantes, o poder desses dois testes é próximo de 20% para amostras de tamanhos $n=5$, está na faixa dos 80% para $n=25$ e é próximo de 1 para $n \geq 50$. Para a situação 1 o poder já está em torno de 11% para $n=10$, para $n=50$ já está na faixa dos 60% sendo próximo de 1 a partir de $n=100$. Para a situação 4 na qual os determinantes das duas matrizes são distintos mas os autovalores são semelhantes, esses dois testes só começam a captar a diferença entre as matrizes de covariâncias a partir de $n=50$ (poder em torno de 20%) chegando a 80% apenas para $n=200$, o que pode ser considerado como um resultado bastante satisfatório de poder dado a semelhança dos autovalores das duas matrizes.

Em todas as situações testadas os testes estatísticos fundamentados nos autovalores tiveram desempenho muito superior ao da variância generalizada.

TABELA 4 – Estimativas médias do poder dos testes para vários tamanhos de amostras

Casos	$n=5$			$n=10$			$n=25$		
	VG	HT	H	VG	HT	H	VG	HT	H
1	0,0019	0,0062	0,0590	0,0032	0,1176	0,1198	0,0031	0,2959	0,3042
2	0,0025	0,1728	0,1717	0,0019	0,3379	0,3540	0,0027	0,7224	0,7731
3	0,0035	0,2141	0,2111	0,0024	0,4073	0,4268	0,0038	0,8190	0,8626
4	0,0035	0,0135	0,014	0,0099	0,0320	0,0328	0,0290	0,0963	0,0824
Casos	$n=50$			$n=100$			$n=200$		
	VG	HT	H	VG	HT	H	VG	HT	H
1	0,0025	0,5531	0,6739	0,0028	0,9291	0,9758	0,0039	1	1
2	0,0033	0,9617	0,9909	0,0021	1	1	0,0028	1	1
3	0,0025	0,9866	0,9970	0,0025	1	1	0,0031	1	1
4	0,0777	0,2086	0,2048	0,2098	0,4835	0,4631	0,5437	0,8341	0,8238

5. Considerações Finais

Neste artigo propomos dois testes estatísticos para matriz de covariâncias, de fácil implementação, que são fundamentados nos autovalores das matrizes de covariâncias teórica e estimada e na suposição de que os dados são provenientes da distribuição normal multivariada. O estudo feito via simulação Monte Carlo para o caso bivariado, mostrou que esses testes foram mais poderosos que o tradicional teste da variância generalizada tanto em

situações nas quais os determinantes das matrizes sob as hipóteses nula e alternativa eram muito diferentes quanto nos casos em que os determinantes das matrizes eram semelhantes mas as estruturas de seus componentes eram diferentes. Deste modo, considera-se que o uso dos autovalores para caracterização das matrizes de covariâncias é mais apropriado do que o uso apenas dos seus determinantes sendo possível construir testes estatísticos mais poderosos a partir dos autovalores. É importante salientar que a utilização de distribuições assintóticas tanto para o teste da variância generalizada quanto para os testes dos autovalores não é indicada para amostras pequenas. Nesses casos, deve-se usar a distribuição exata para determinação dos limites de controle do processo (região de não rejeição da hipótese de controle estatístico), algo que pode ser feito facilmente através de simulação como foi mostrado nesse artigo.

Outros estudos deverão ser conduzidos com o propósito de avaliar o desempenho dos testes estatísticos fundamentados nos autovalores em situações nas quais se tem mais de duas características de qualidade de interesse. Além disso, é importante comparar esses testes com outros existentes na literatura como o VMAX de Costa e Machado (2008) e o de Sullivan et. al. (2007), dentre outros (ver YEH, 2006).

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo financiamento que possibilitou a execução desse trabalho.

Referências

- ANDERSON, T.W. *An introduction to multivariate statistical analysis*. New York: John Wiley, 2003.
- APARISI, T.; JABAIYES, J.; CARRION, A. Statistical properties of the $|S|$ multivariate control chart. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, n.11, p.2671-2686, 1999.
- CASELLA, G; BERGER., R. L. *Statistical inference*. California: Duxbury Thomson Learning, 2002.
- COSTA, A. F.B; MACHADO, M.A.G. A new multivariate control chart for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. *Communication in Statistics-Simulation and Computation* n. 37, p. 1453-1465, 2008.
- DJAUHARI, M. Asymptotic distribution of sample covariance determinant. *Matematika*, n.1, p.79-85, 2009.
- HAYTER, A. J.; TSUI, K-L. Identification and quantification in multivariate quality control problems. *Journal of Quality Technology*, n.3, p.197-208,1994.
- JOHNSON, R.A.; WICHERN, W. D. *Applied multivariate statistical analysis*. New Jersey:P prentice-Hall,2002.
- KALGONDA, A. A.; KULKARNI, S. R., Multivariate quality control chart for autocorrelated process. *Journal of Applied Statistics*, vol.31, nº 3, p. 317-327, 2004.
- MASON,R.L.;YOUNG,J.C. *Multivariate statistical process control with industrial applications*. Alexandria:ASA-SIAM, 2002.
- MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao controle estatístico de qualidade*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos Científicos, 2004.
- MUDHOLKAR, G. S.; SRIVASTAVA, D. K. A class of robust stepwise alternatives to Hotelling's T^2 tests. *Journal of Applied Statistics*, n. 5, p. 599-619, 2000.
- NIVERTHI, M., DEY, D. K. Multivariate process capability: a bayesian perspective. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, n..29, p. 667-687, 2000.
- PEARN, W. L.; WANG, F. K.; YEN, C. H. Multivariate capability indices: distributional and inferential properties. *Journal of Applied Statistics*, n.8 , pp. 941-962, 2007.
- SULLIVAN,J.H.; STOUMBOS, Z. G., MASON, R.L., YOUNG, J.C. Step-down analysis for change in the covariance matrix and other parameters. *Journal of Quality Technology*, n.1,p. 66-85, 2007.

WILLIAMS, J. D.; WOODALL, W. H.; BIRCK, J. B.; SULLIVAN, J. H. Distribution of Hotelling's T^2 statistic based on the successive differences estimator. *Journal of Quality Technology*, n. 3, p. 217-229, 2006.

YEH, A.B.; LIN, D.K.; MCGRATH, R.N. Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review. *Quality Technology et. Quantitative Management*, n. 4, p. 415-436, 2006.