

Equivalências em modelos MOLP-DEA que fornecem benchmarks para unidades ineficientes – o modelo MORO-D-R

Silvio Figueiredo Gomes Júnior (UFF)

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello (UFF)

Lidia Angulo Silvio Figueiredo Gomes Júnior (UFF)

Maria Cecília de Carvalho Chaves (UFF)

Eliane Ribeiro Pereira (UFF)

Resumo: Este artigo tem como objetivo apresentar um novo modelo DEA-Multiobjetivo, o MORO-D-R. Este modelo é derivado do modelo MORO-D pela relaxação das restrições desigualdade. Ambos os modelos fornecem alvos e benchmarks alternativos aos fornecidos pelos modelos DEA clássicos. É demonstrado qual a condição para os dois modelos fornecerem soluções idênticas e mostram-se quais as vantagens do uso do modelo MORO-D-M no lugar do MORO-D.

Palavras-chave: Programação Linear Multiobjetivo; Análise Envoltória de Dados; Alvos, Benchmarks.

1. Introdução

A programação linear dentro do contexto da Pesquisa Operacional tem sido amplamente divulgada e aplicada nas mais diversas áreas. No entanto, existem casos em que mais de um objetivo, muitas vezes conflitantes, podem ocorrer quando tentamos encontrar a melhor solução possível a um problema de otimização. Nestes casos a Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) se apresenta como uma forma de encontrar uma solução, que neste caso, dado que existem múltiplos objetivos, será um conjunto de soluções eficientes, chamadas de não dominadas, para o problema (ANGULO-MEZA *et al.*, 2006)

A utilização de problemas multiobjetivo pode representar uma grande vantagem com relação à programação linear mono objetivo, pois considera vários aspectos de um problema (CLÍMACO *et al.*, 2003). Além disso, enquanto que ao otimizar um problema de programação linear mono objetivo (ou otimização escalar) é obtida uma solução ou um conjunto de soluções ótimas, com um mesmo valor na função objetivo. Já, na otimização de problemas linear multiobjetivo (ou na otimização vetorial) obtém-se um conjunto de soluções eficientes, também chamadas de não dominadas, não comparáveis entre si em termos dos valores das funções objetivo., Dentre essas o decisor poderá escolher levando em consideração aspectos operacionais e gerenciais.

Em outro contexto, a Análise Envoltória de Dados (CHARNES *et al.*, 1978), mais conhecido por DEA, por seu nome em inglês *Data Envelopment Analysis*, é uma abordagem não paramétrica para avaliação de eficiência de um conjunto de unidades produtivas, chamadas de DMUs, que utilizam os mesmos recursos (*inputs*) para produzir os mesmos produtos (*outputs*).

Em DEA é calculado um índice de eficiência para cada uma das DMUs, podendo classificá-las em eficientes (eficiência 100%) ou ineficientes (eficiência menor que 100%). Para as DMUs ineficientes são calculados alvos, níveis dos *inputs* e *outputs* que devem ser atingidos para eles se tornarem eficientes, assim como um conjunto de referência, que são DMUs eficientes, *benchmarks*, que servem de exemplo de boas práticas gerenciais.

Entretanto, cada modelo DEA calcula um e somente um alvo para cada DMU ineficiente, e que está baseado na projeção determinada pelos modelos DEA padrão. No entanto, existem alternativas para escolher esses alvos, nos últimos anos têm surgido modelos para determinar alvos alternativos que sejam preferíveis para os decisores.

Este trabalho apresenta uma modificação ao modelo Programação Linear Multiobjetivo (PLMO) que determina não somente um, mas um conjunto de alvos para as DMUs ineficientes, denominado MORO-D (SOARES DE MELLO *et al.*, 2003; LINS *et al.*, 2004; QUARIGUASI FROTA NETO e ANGULO-MEZA, 2007). A modificação apresentada neste trabalho faz uma relaxação das restrições de igualdade e será denominada modelo MORO-D-R. Ambos os modelos apresentam para o decisor a vantagem de poder escolher o alvo da sua preferência ou que esteja dentro das possibilidades operacionais de cada DMU. As vantagens do modelo MORO-D-R também serão apresentadas, junto com o potencial para futuros desenvolvimentos.

2. Utilização de PLMO no contexto DEA

A PLMO e DEA têm vários pontos em comum tal como é claramente apresentado nos trabalhos de Joro *et al* (1998), Clímaco *et al* (2008) e já tinha sido usado, sem grandes considerações teóricas por Golany (1988). Muitos pesquisadores têm aproveitado esses pontos em comum para obter vantagens de um ou outro enfoque (HALME *et al.*, 1999; KORHONEN *et al.*, 2003; SILVEIRA *et al.*, 2008; LOZANO e VILLA, 2009; SOARES DE MELLO *et al.*, 2009), além dos já anteriormente citados.

Por outro lado, nos modelos DEA clássicos os alvos para as DMUs ineficientes são obtidos através de uma projeção baseada na redução equiproporcional dos inputs ou no aumento equiproporcional dos outputs. Para cada orientação esse alvo é único. Entretanto, esta projeção não incorpora nenhum conceito que mostre ser preferível a qualquer outra na fronteira, e tampouco leva em conta preferências do decisor na busca de um alvo eficiente. OU seja o alvo é eficiente, mas não é necessariamente eficaz (GOLANY, 1988).

No trabalho de Golany (1988) é apresentado um algoritmo para encontrar alvos que sejam simultaneamente eficientes e eficazes, segundo a opinião do decisor. Este algoritmo corresponde a um modelo multiobjetivo não formalizado pelo autor (CLÍMACO *et al.*, 2008). O modelo MORO-D apresentado em Soares de Mello *et al* (2003) Lins *et al* (2004), Quariguasi-Frota Neto e Angulo-Meza (2007), formaliza o problema multiobjetivo implícito no algoritmo de Golany (1988). Esta formalização será apresentada a seguir.

3. Modelo multiobjetivo para determinação de alvos alternativos: MORO-D

O modelo MORO-D apresentado em Soares de Mello *et al* (2003), Lins *et al* (2004), Quariguasi-Frota Neto e Angulo-Meza (2007) é um modelo multiobjetivo para determinação de um conjunto de alvos para uma DMU ineficiente. Neste modelo, a idéia principal é que os incrementos nos outputs e as reduções nos inputs são realizadas de forma independente. Em (1) é apresentado o modelo multiobjetivo MORO-D versão CRS.

$$\begin{aligned} & \max \phi_1 \\ & \dots\dots \\ & \max \phi_s \\ & \min \varphi_1 \\ & \dots\dots \end{aligned} \tag{1}$$

$$\min \varphi_m$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\phi_i x_{ij_0} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\phi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

O modelo em (1) possui uma função objetivo para a projeção de cada variável. Assim ϕ_r , representa o incremento para cada output r , e ϕ_i , representa a redução para cada input i . As duas primeiras restrições do modelo garantem que o alvo encontrado esteja na fronteira eficiente. As duas últimas restrições garantem que a DMU seja dominada pelo alvo no sentido de Pareto, isto é, o alvo não pode ter nenhum input maior nem nenhum output menor do que a DMU. Este modelo é a versão CRS, pois considera proporcionalidade entre inputs e outputs.

Já na versão VRS deveria ser incluída a restrição de convexidade, isto é, $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

Pode-se observar que o modelo (1) possui $s + m$ funções objetivo, isto é, a quantidade total de funções objetivo é igual à quantidade total de variáveis (inputs + outputs) do modelo DEA. Tem-se s variáveis ϕ , m variáveis φ e n variáveis λ , um total de $s + m + n$ variáveis de decisão do modelo multiobjetivo. Com relação às restrições, para a versão CRS temos $2s + 2m$ restrições de igualdade. As variáveis de decisão do modelo multiobjetivo são $\phi_s, \lambda_j, \varphi_m$.

As restrições do modelo (1) são semelhantes às dos modelos do envelope tradicional. A diferença é que no modelo MORO-D as restrições de desigualdade, são substituídas por restrições de igualdade. Esta substituição garante que os alvos sejam pontos fortemente eficientes, mas apresenta inconvenientes de ordem computacional. Se a DMU for eficiente, logo estará na fronteira encontrando-se na fronteira Pareto eficiente ou fortemente eficiente e assim $\phi_r^* = \varphi_i^* = 1, \forall r, i$. Caso contrário, os alvos para os outputs são dados por (2) e os alvos para os inputs são dados por (3).

$$y_{rj_0}^* = \phi_r^* y_{rj_0}, \quad \forall r \tag{2}$$

$$x_{ij_0}^* = \phi_i^* x_{ij_0}, \quad \forall i \tag{3}$$

O valor final $y_{rj_0}^*$ e $x_{ij_0}^*$ depende dos valores que o decisor escolheu para ϕ_r^* e φ_i^* dentre as soluções não dominadas do modelo problema (1). Desta forma, é possível obter alvos alternativos baseados nas preferências do decisor.

Além das dificuldades computacionais, as restrições de igualdade tornam trivial e sem interesse certas análises como o estudo do ponto Nadir (METEV e GUEORGUIEVA, 2000).

4. Modelo multiobjetivo com relaxação das igualdades MORO-D-R

Na seção anterior, o modelo MORO-D foi apresentado e certas limitações foram destacadas. Com o objetivo de sobrepujar essas limitações apresenta-se em (4) o modelo MORO-D-R, com uma relaxação das igualdades do modelo MORO-D.

$$\begin{aligned}
 & \max \phi_1 \\
 & \dots\dots \\
 & \max \phi_s \\
 & \min \varphi_1 \\
 & \dots\dots \\
 & \min \varphi_m
 \end{aligned} \tag{4}$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} \leq \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i x_{ij_0} \geq \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

No modelo (4), tal como no modelo (1), tem-se $s + m$ funções objetivo, isto é, quantidade total de funções objetivo igual à quantidade total de variáveis (inputs + outputs) do modelo DEA. Tem-se s variáveis ϕ , m variáveis φ e n variáveis λ , um total de $s + m + n$ variáveis de decisão do modelo multiobjetivo. Com relação às restrições, para a versão CRS temos $2s + 2m$ restrições de igualdade. As variáveis de decisão do modelo multiobjetivo continuam sendo $\phi_s, \lambda_j, \varphi_m$. Neste modelo (4) observa-se que os dois primeiros conjuntos de restrições são iguais aos do modelo do envelope, no sentido de usar desigualdades.

5. Validação do uso do modelo MORO-D-R

Para que se possa usar o modelo MORO-D-R no lugar do modelo MORO-D é necessário verificar qual a relação existente entre o conjunto de soluções dos dois modelos. Para embasar as demonstrações necessárias serão, em seguida, revistos alguns conceitos:

5.1. Fronteira de Produção

Segundo Lins e Angulo-Meza (2000) um conjunto de possibilidades de produção T (região viável) possui as seguintes propriedades:

- 1ª propriedade: Convexidade: Se $(x_j, y_j) \in T, j = 1, \dots, n$ e $\lambda_j, j = 1, \dots, n$ são escalares não negativos tais que $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ então:

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot y_j \right) \in T \tag{5}$$

- 2ª propriedade: Ineficiência

$$\text{Se } (x, y) \in T \text{ e } \bar{x} \geq x \rightarrow (\bar{x}, y) \in T \tag{6}$$

$$\text{Se } (x, y) \in T \text{ e } \bar{y} \leq y \rightarrow (x, \bar{y}) \in T \tag{7}$$

- 3ª propriedade: Raio ilimitado (no caso de fronteira CRS)

$$\text{Se } (x, y) \in T \rightarrow \langle x, ky \rangle \in T, \forall k > 0 \quad (8)$$

5.2. Fronteira Pareto eficiente (formulação não arquimediana)

Seja $L(y)$ um conjunto de inputs e $h(x, y) = \min \{h \mid hx \in L(y), h \geq 0\}$ onde h é o menor valor, sempre menor que 1, tal que, multiplicado pelo vetor de insumos da DMU, resulta em uma redução equiproporcional destes insumos.

Seja $L_s(y) = \{x \mid h(x, y) = 1\}$ a fronteira de produção para um dado conjunto de outputs y . Esta fronteira pode conter duas DMUs com o mesmo valor de produto e dois vetores de insumo da forma:

$$x' = \langle x_1, \dots, x_i, \dots, x_m \rangle \in L_s(y) \quad (9)$$

$$x'' = \langle x_1, \dots, x_i + d, \dots, x_m \rangle \in L_s(y) \quad (10)$$

Com $d > 0$, x'' é, portanto, Pareto ineficiente. Assim $L_s(y)$ define a fronteira fracamente eficiente.

Seja agora $L_E(y) = \{x \mid h(x, y) = 1 \wedge \exists \bar{x} < x \text{ tal que } \bar{x} \in L(y)\}$ o conjunto é Pareto eficiente.

As DMUs eficientes encontradas pelos modelos DEA definem os vértices da fronteira linear por partes $L_s(y)$, que não corresponde à fronteira $L_E(y)$. Estes modelos irão promover o máximo deslocamento de uma DMU ineficiente na direção radial, enquanto pertence ao conjunto de possibilidades de produção, T .

Assim, a folga dada por $(h \cdot x_0 - \sum \lambda_j \cdot x_j)$ não diz se esta projeção está na fronteira $L_s(y)$ ou $L_E(y)$.

Para se distinguir em qual região da fronteira de eficiência encontra-se a projeção da DMU, utiliza-se o modelo não arquimediano, descrito em (11).

5.3. Modelo do envelope CRS não arquimediano com orientação a input

O modelo não arquimediano CRS que maximiza a soma das folgas depois de projetar a DMU na fronteira faz a distinção entre a fronteira $L_s(y)$ e $L_E(y)$. Essa distinção é feita da seguinte forma: se uma DMU tem h igual a 1 no modelo CCR clássico e no modelo (11) ela pertence a $L_E(y)$. Se no modelo CCR tem h igual a 1 e no modelo (11) tem h menor que 1, então a DMU pertence a $L_s(y)$.

$$\text{Minimizar } h - \varepsilon \sum_i s_i^+ - \varepsilon \sum_i s_i^-$$

sujeito a:

$$hx_0 - \sum x_j \lambda_j - s^- = 0 \quad (11)$$

$$\sum y_j \lambda_j - s^+ = y_0$$

$$\lambda_j, s^+, s^- \geq 0$$

No modelo (11), s^- representa as folgas relativas aos inputs e s^+ representa a folga relativa aos outputs.

5.4. Comparação entre os modelos MORO-D e MORO-D-R

Seja o conjunto solução do modelo MORO-D $\{\phi_r^*, \varphi_i^*\} \forall r, i$. Este conjunto solução garante que a DMU j_0 seja projetada na fronteira $L_E(y)$. De fato, as restrições de igualdade obrigam a que todas as folgas s^- e s^+ sejam nulas, o que garante a equivalência do modelo CCR clássico e o modelo (11) que é a condição imposta para que a fronteira seja fortemente eficiente.

Já para o modelo MORO-D-R é possível existirem folgas estritamente positivas no conjunto solução, o que impede, *a priori*, verificar se o alvo pertence a $L_E(y)$. Assim, deve-se utilizar o modelo não arquimediano associado ao modelo MORO-D-R, apresentado em (12):

$$\begin{aligned}
 & \max \phi_1 + \varepsilon \cdot s_1^+ \\
 & \dots\dots \\
 & \max \phi_s + \varepsilon \cdot s_s^+ \\
 & \min \varphi_1 - \varepsilon \cdot s_1^- \\
 & \dots\dots \\
 & \min \varphi_m - \varepsilon \cdot s_m^-
 \end{aligned} \tag{12}$$

Sujeito a:

$$\phi_r y_{rj_0} - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = 0, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i x_{ij_0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1, \quad \forall r = 1, \dots, s$$

$$\varphi_i \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Seja agora o conjunto solução do modelo MORO-D-R $\{\phi_r', \varphi_i'\} \forall r, i$ do modelo não arquimediano associado ao modelo MORO-D-R, ou seja, é o conjunto de soluções fortemente eficientes do modelo MORO-D-R.

O que se quer demonstrar é que o conjunto de soluções fortemente eficientes fornecidas pelos dois modelos (MORO-D e MORO-D-R) é igual. Para tal supõe-se o contrário, ou seja, que esses modelos admitem soluções diferentes. Esta suposição equivale a dizer que $\phi_r' < \phi_r^*$ e $\varphi_i' > \varphi_i^*$, pois a solução do modelo MORO-D $\{\phi_r^*, \varphi_i^*\}$ está na fronteira Pareto eficiente $L_E(y)$ e as únicas variações possíveis em uma solução quando esta se encontra na fronteira fracamente eficiente $L_S(y)$ são valores menores para outputs ou valores maiores para inputs. Assim, analisando as funções objetivo, percebe-se que a existência de folgas estritamente positivas faz com que o valor da função objetivo aumente, no caso dos outputs e diminua no caso dos inputs.

Pela estrutura dos modelos isso só pode ocorrer se os valores s_r^+ e s_i^- do modelo MORO-D-R não arquimediano forem estritamente positivos.

Entretanto, como as projeções se dão na fronteira $L_E(y)$, as folgas s_r^+ e s_i^- são, necessariamente, iguais a zero. Chega-se assim a uma contradição o que invalida a hipótese e caracteriza a demonstração da negação da hipótese pelo método da redução ao absurdo.

Como a hipótese era que $\phi'_r \neq \phi_r^*$ e $\phi'_i \neq \phi_i^*$, então a sua negação é que $\phi'_r = \phi_r^*$ e $\phi'_i = \phi_i^*$. Assim, os resultados dos modelos MORO-D e MORO-D-R são iguais quando se consideram apenas projeções na região Pareto eficiente da fronteira ($L_E(y)$).

6. Exemplo numérico

Sejam os dados apresentados na tabela 1 representando um conjunto com 6 DMUs, cada uma com 2 inputs e 1 output com suas respectivas eficiências calculadas pelo modelo DEA CRS clássico orientado a input.

Tabela 1 – Dados do exemplo numérico

DMUs	Input 1	Input 2	Output	Eficiência CRS Input
A	1	4	10	0,9090
B	2	2	9	0,7200
C	1	3	11	1,0000
D	4	2	13	0,6419
E	3	1	14	1,0000
F	4	4	9	0,3600

As DMUs C e E definem a fronteira de eficiência. Na figura 1, o segmento de reta CE representa a fronteira Pareto eficiente, o segmento de reta vertical com início em C e o segmento de reta horizontal com início em E representam a fronteira fracamente eficiente, pois, mesmo uma DMU estando nestes trechos da fronteira, é possível aumentar o valor do output e/ou reduzir o valor do input e esta DMU ainda estará sobre a fronteira (se desloca para baixo caso esteja no trecho vertical ou para a esquerda se estiver no segmento horizontal).

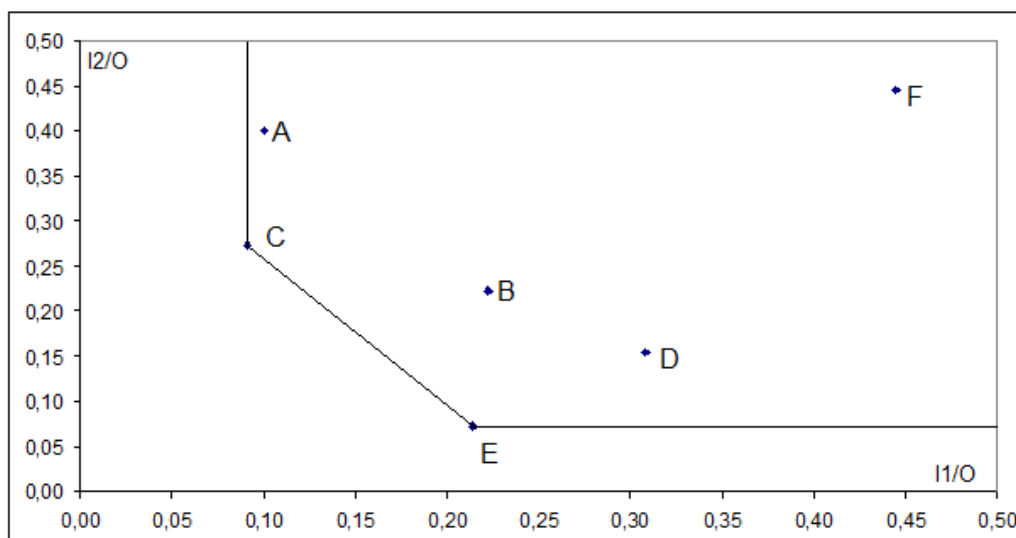


Figura 1 – Fronteira de eficiência do exemplo numérico

Como era de se esperar, as DMUs A, B, F e D encontram-se no interior da região definida pela fronteira de eficiência. Deve-se então encontrar os alvos para estas DMUs de forma a torná-las eficientes. Será utilizado inicialmente a formulação do modelo MORO-D e, posteriormente, a formulação do modelo MORO-D-R para verificar a igualdade das soluções, como demonstrado no item 5.4.

6.1 Formulações dos modelos MORO-D e MORO-D-R para o exemplo numérico

Em (13) e (14) estão discriminados os PPLs versão CRS dos modelos MORO-D e MORO-D-R, respectivamente, para a DMU B. Esta DMU tem como referência as DMUs C e E pois são as DMUs eficientes do conjunto de dados. Os PPLs para as DMUs A, D e F são equivalentes, alterando apropriadamente os valores de seus inputs e outputs conforme a DMU que está sendo analisada.

$$\max \phi_1$$

$$\min \varphi_1$$

$$\min \varphi_2$$

Sujeito a:

$$9.\phi_1 = 11.\lambda_1 + 14.\lambda_2 \quad (13)$$

$$2.\varphi_1 = 1.\lambda_1 + 3.\lambda_2$$

$$2.\varphi_2 = 3.\lambda_1 + 1.\lambda_2$$

$$\phi_1 \geq 1$$

$$\varphi_1 \leq 1$$

$$\varphi_2 \leq 1$$

$$\max \phi_1$$

$$\min \varphi_1$$

$$\min \varphi_2$$

Sujeito a:

$$9.\phi_1 \leq 11.\lambda_1 + 14.\lambda_2 \quad (14)$$

$$2.\varphi_1 \geq 1.\lambda_1 + 3.\lambda_2$$

$$2.\varphi_2 \geq 3.\lambda_1 + 1.\lambda_2$$

$$\phi_1 \geq 1$$

$$\varphi_1 \leq 1$$

$$\varphi_2 \leq 1$$

6.2. Discussão de Resultados

Utilizando o software ADBASE (STEUER, 1983), que incorpora o simplex multiobjetivo para resolver problemas de programação linear multiobjetivo. Este software

fornece um conjunto de solução não dominadas extremas, encontra-se os resultados apresentados na tabela 2, para os valores de φ_1 , φ_2 , ϕ_1 , λ_1 e λ_2 para as DMUs ineficientes A, B, D e F, assim como os alvos, ou seja, os novos níveis dos *inputs* e *output* que projetam a respectiva DMU na fronteira de eficiência.

Tabela 2 – Resultados do exemplo numérico

DMUs	A	B	C	D	E	F
Input 1 (x_1)	1	2	1	4	3	4
Input 2 (x_2)	4	2	3	2	1	4
Output (y_1)	10	9	11	13	14	9
φ_1	1,000	1,000	-	1,000	-	1,000
φ_2	0,750	1,000	-	1,000	-	1,000
ϕ_1	1,100	1,389	-	1,558	-	2,778
λ_1	1,000	0,500	-	0,250	-	1,000
λ_2	0,000	0,500	-	1,250	-	1,000
$\varphi_1 \cdot x_1$	1,000	2,000	-	4,000	-	4,000
$\varphi_2 \cdot x_2$	3,000	2,000	-	2,000	-	4,000
$\phi_1 \cdot y_1$	11,000	12,500	-	20,250	-	25,000

Como visto, o valor de φ_1 e φ_2 representam as reduções que devem sofrer os valores dos *inputs* 1 e 2, respectivamente, e ϕ_1 representa o acréscimo que deve sofrer o *output* para que a DMU esteja sobre a fronteira de eficiência. As variáveis λ_1 e λ_2 representam os alvos da DMU analisada, onde λ_1 está associado à DMU C e λ_2 está associado à DMU E. A figura 2 representa as projeções das DMUs A, B, D e F na fronteira de eficiência com os valores encontrados pelo modelo MORO-D.

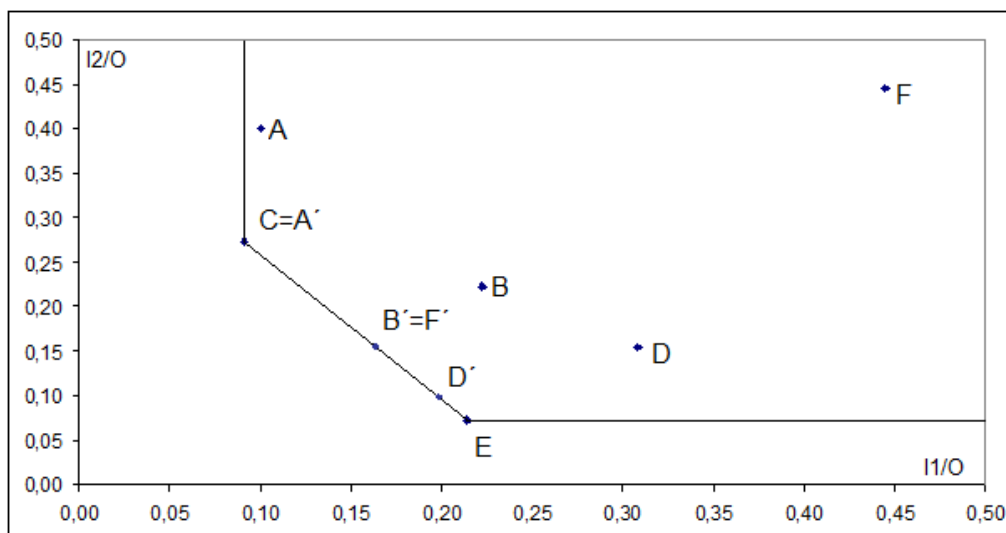


Figura 2 – Projeções das DMUs ineficientes na fronteira de eficiência

6.3. Resultados Modelo MORO-D-R

Como era de se esperar, os resultados de todas as variáveis para todas as DMUs no modelo MORO-D-R são iguais ao modelo MORO-D, apresentado então, como solução, as mesmas projeções mostradas na figura 2.

7. Conclusão

Este trabalho propõe a utilização de modelo de programação linear multiobjetivo, menos rígidos, para determinar alvos alternativos para as DMUs na Análise Envoltória de Dados. Estes alvos são projeções não radiais de DMUs ineficientes na fronteira Pareto-eficiente. O enfoque multiobjetivo permite a obtenção de um conjunto de alvos, em oposição a um único alvo fornecido pelos modelos DEA clássicos (com uma única função objetivo).

A utilização do modelo MORO-D-R permite uma maior simplicidade computacional por apresentar restrições de desigualdade. Além disso o modelo MORO-D-R apresenta regiões de indiferença aos pesos de dimensão completa (marcela), o que permite a utilização de métodos baseados na área dessas regiões, como o TRIMAP (CLIMACO e ANTUNES, 1989). A restrição de desigualdade ainda expande o espaço de soluções viáveis, o que permite uma maior riqueza nas análises baseadas em ponto ideal e ponto nadir (anti-ideal).

Entretanto, maiores aprofundamentos ainda se fazem necessários, pois este trabalho apresenta a igualdade de resultados quando uma DMU ineficiente é projetada na fronteira Pareto eficiente. Quando uma DMU ineficiente se projeta em uma região fracamente eficiente da fronteira, não se pode garantir que os modelos MORO-D e MORO-D-R apresentem as mesmas soluções. Estas situações encontram-se em análise e não estão contempladas neste trabalho.

Referências

- ANGULO-MEZA, L., SOARES DE MELLO, J. C. C. B. & CLÍMACO, J. C. N. *Estudos Conjuntos de Análise Envoltória de Dados (DEA) e Programação Linear Multiobjetivo (PLMO): Uma Revisão Bibliográfica*. Relatório de Pesquisa em Engenharia de Produção, Vol. 6, 2006.
- CHARNES, A., COOPER, W. W. & RHODES, E. Measuring the efficiency of decision-making units. *European Journal of Operational Research* Vol. 2, n. 6, p. 429-444, 1978.
- CLIMACO, J. C. N. & ANTUNES, C. H. Implementation of a user-friendly software package. A guided tour of TRIMAP. *Mathematical and Computer Modelling* Vol. 12, n. 10-11, p. 1299-1309, 1989.
- CLÍMACO, J. C. N., ANTUNES, C. H. & ALVES, M. J. G. *Programação Linear Multiobjetivo*. Coimbra: Universidade de Coimbra, 2003
- CLÍMACO, J. C. N., SOARES DE MELLO, J. C. C. B. & ANGULO-MEZA, L. *Performance Measurement – From DEA to MOLP*. Ed. Ed. Encyclopedia of Decision Making and Decision Support Technologies. Hershey: Information Science Reference, v.2, 2008. Performance Measurement – From DEA to MOLP, p.709-715
- GOLANY, B. An interactive MOLP procedure for the extension of DEA to Effectiveness Analysis. *Journal of the Operational Research Society* Vol. 39, n. 8, p. 725-734, 1988.
- HALME, M., JORO, T., KORHONEN, P., SALO, S. & WALLENIUS, J. A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis. *Management Science* Vol. 45, n. 1, p. 103-115, 1999.
- JORO, T., KORHONEN, P. & WALLENIUS, J. Structural comparison of data envelopment analysis and multiple objective linear programming. *Management Science* Vol. 44, n. 7, p. 962-970, 1998.
- KORHONEN, P., STENFORS, S. & SYRJANEN, M. Multiple objective approach as an alternative to radial projection in DEA. *Journal of Productivity Analysis* Vol. 20, n. 3, p. 305-321, 2003.

LINS, M. P. E. & ANGULO-MEZA, L. *Análise Envoltória de Dados e perspectivas de integração no ambiente de Apoio à Decisão*. Rio de Janeiro: Editora da COPPE/UFRJ, 2000

LINS, M. P. E., ANGULO-MEZA, L. & MOREIRA DA SILVA, A. C. A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society* Vol. 55, n., p. 1090–1101, 2004.

LOZANO, S. & VILLA, G. Multiobjective target setting in data envelopment analysis using AHP. *Computers & Operations Research* Vol. 36, n., p. 549-564, 2009.

METEV, B. & GUEORGUIEVA, D. A simple method for obtaining weakly efficient points in multiobjective linear fractional programming problems. *European Journal of Operational Research* Vol. 126, n., p. 386-390, 2000.

QUARIGUASI FROTA NETO, J. & ANGULO-MEZA, L. Alternative targets for data envelopment analysis through multi-objective linear programming: Rio de Janeiro Odontological Public Health System Case Study. *Journal of the Operational Research Society* Vol. 58, n., p. 865–873, 2007.

SILVEIRA, J. Q., PEREIRA, E. R., CORREIA, T. C. V. D., SOARES DE MELLO, J. C. C. B., CLIMACO, J. C. N. & ANGULO-MEZA, L. *Avaliação da eficiência das companhias aéreas brasileiras com uma variação do modelo de Li e Reeves*. Engevista Vol. 10, n. 2, p. 145-155, 2008.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B., ANGULO-MEZA, L., GOMES, E. G., SERAPIÃO, B. P. & LINS, M. P. E. *Análise de Envoltória de Dados no estudo da eficiência e dos benchmarks para companhias aéreas brasileiras*. Pesquisa Operacional Vol. 23, n. 2, p. 325-345, 2003.

SOARES DE MELLO, J. C. C. B., CLIMACO, J. C. N. & ANGULO-MEZA, L. *Efficiency evaluation of a small number of DMUs: an approach based on Li and Reeves's model*. Pesquisa Operacional Vol. 29, n. 1, p. 97-110, 2009.

STEUER, R. E. *Operating Manual for the ADBASE Multiple Objective Linear Programming Package*. Terry College of Business, University of Georgia. Athens, Georgia, 1983